IQS School of Engineering

UNIVERSITAT RAMON LLULL

Matemàtiques III (GETI)
Mètodes Numèrics per a Enginyers (GEQ)

Curs 2024-2025. Tema 2

Dra. Meritxell Sáez - Dr. José Javier Molins

2. Raíces de ecuaciones

2.1. Definición del problema
2.2. Métodos para ecuaciones generales
    2.2.1. Método de las sustituciones sucesivas
    2.2.2. Método de la búsqueda por incrementos
    2.2.3. Método de la bisección
    2.2.4. Método de la secante. Método de la Regula Falsi
    2.2.5. Método de Newton-Raphson
2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas
    2.3.1. Análisis de las raíces
    2.3.2. Esquema de Horner
    2.3.3. Método de Bairstow
2.4. Sistemas de ecuaciones no lineales

2.1. Definición del problema

- **Definición matemática de raíz: diremos que a es raíz de $f(x)$ si y solo si $f(a) = 0$.**
- **Nuestro problema consistirá en calcular una o todas las raíces de $f(x)$.**
- **Métodos de resolución:**
  - Directos:
    - Despejan una variable de la función
    - En muchos casos no hay solución por este método
  - Iterativos:
    - Ecuaciones trascendentes o no polinómicas
    - Ecuaciones polinómicas (también se pueden aplicar los de las trascendentes)

2.1. Definición del problema

- **Definición más operativa de raíz**: diremos que a es raíz de $f(x)$ cuando, dado un $\varepsilon > 0$, se cumpla $|f(a)| \leq \varepsilon$.

- Por este motivo, si a es raíz de $f(x)$, en sentido matemático también lo es de $\mathrm{M} \cdot f(x)$, pero no en sentido numérico.

- Las **ecuaciones mal condicionadas** son aquellas en que pequeños cambios en los coeficientes alteran grandemente el valor de las raíces.

- Es muy difícil decir a priori cuando una ecuación está mal condicionada, y la única solución es aumentar la precisión de los números con que se trabaja.

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- **2.2.1. Método de las sustituciones sucesivas**

$$F(x) = 0$$

  - Es un método iterativo, por lo tanto, necesita una solución inicial x_0 y una cota de error ε_0 que representa el error máximo admisible.

  - De la ecuación $F(x) = 0$, se puede obtener diversas ecuaciones que no tienen porqué ser convergentes

$$x = G_1(x)$$
$$x = G_2(x)$$
$$x = x + F(x)$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- Si $y = G(x)$ no es convergente, $x = G^{-1}(y)$ sí lo es.
- El proceso iterativo que se sigue es:

$$x_{n+1} = G\ (x_n)$$

- La condición general que asegura la convergencia es que

$$|G'(x)| < 1$$

- Ejemplo: $F(x) = \log(x) - \cos(x)$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- **2.2.2. Método de la búsqueda por incrementos**
  - **Teorema de Bolzano**: Si $f(x)$ es real y continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe por lo menos una raíz real entre a y b.
  - El método de búsqueda por incrementos utiliza esta propiedad para localizar el intervalo en el que la función cambia de signo.
  - Localizado el intervalo, este se subdivide en subintervalos para localizar con más precisión dónde se produce el cambio de signo.
  - Este proceso se repite hasta alcanzar la precisión deseada.
  - En la búsqueda de las raíces de una ecuación puede ser interesante incluir una primera etapa de búsqueda por incrementos que determine dónde se localizan las diversas raíces y aplicar posteriormente alguno de los métodos que se estudiarán.
  - Para localizar raíces hay que tener claro el problema físico que origina la ecuación y determinar entonces los intervalos de búsqueda.

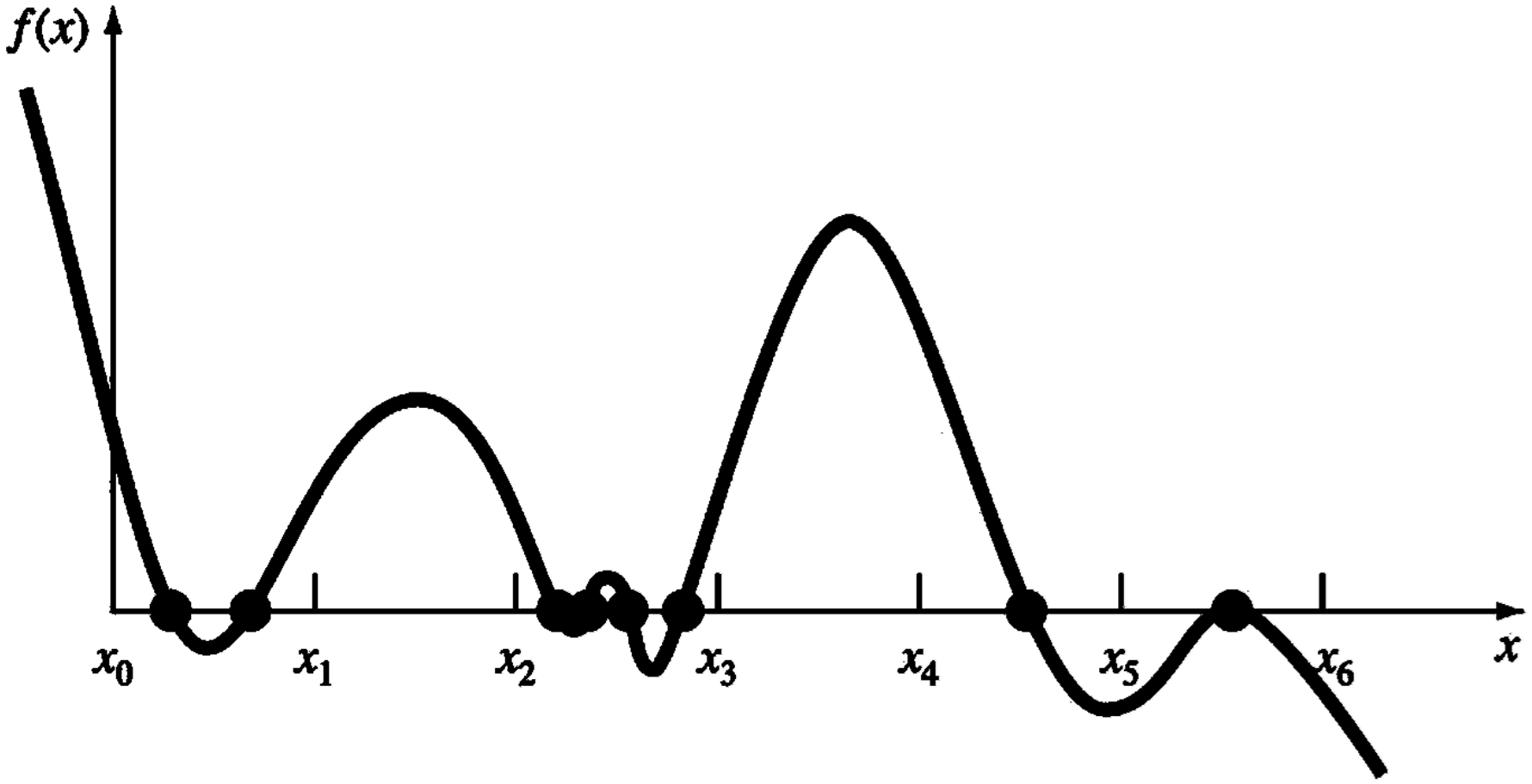
2.2. Métodos para ecuaciones generales

- El problema básico es el de la longitud del paso escogido:
  - Si es grande se pueden perder raíces
  - Si es pequeño el tiempo de cálculo se alarga notablemente

- Los problemas que se pueden encontrar son:
  - En caso de discontinuidades, estas se tendrían que detectar por el programa y, aunque haya cambio de signo, no buscar ninguna raíz en ese intervalo.
  - Si hay una raíz múltiple, esta es difícil de encontrar si solo se reduce el paso

- Si existen raíces múltiples u otros problemas puede ayudar el cálculo de la derivada de la función al inicio y al final del intervalo. Si cambia de signo indica la presencia de un máximo o un mínimo y se puede aconsejar en ese caso un estudio más profundo de dicho intervalo.

2.2. Métodos para ecuaciones generales



2.2. Métodos para ecuaciones generales

2.2.3. Método de la bisección

- Este método también se conoce como método del intervalo mitad o de Bolzano.
- Escogidos los valores extremos x_a y x_b para que se cumpla que $f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$, se procede de la forma siguiente:
  - Se calcula una estimación de la raíz subdividiendo en dos el intervalo original $x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$.
  - Se evalúa $f(x_r)$ y se pueden dar tres casos
    - Si $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$, x_r es la raíz de la función, se termina el cálculo
    - Si $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$, la raíz se encuentra en este subintervalo, $x_b = x_r$
    - En caso contrario, la raíz se encuentra en el otro subintervalo, $x_a = x_r$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- A partir de aquí, se prosigue con las iteraciones.

- El error en el cálculo viene dado por la expresión

$$error = \frac{x_b - x_a}{2^n}$$

- Si se fija el error y se conoce el Δx inicial $(x_b - x_a)$, se puede determinar el número de iteraciones necesarias para obtener la precisión deseada

$$n = \frac{\log\left(\frac{x_b - x_a}{error}\right)}{\log(2)}$$

- Se puede implementar este método con el anterior. El método de la bisección es muy intuitivo, pero su principal problema a la hora de aplicarse es la lentitud de convergencia ante otros métodos.

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- **2.2.4. Método de la secante. Método de la Regula Falsi**

  - **Método de la Regula Falsi**: este método mejora el de bisección ya que, en vez de dividir el intervalo por la mitad, este método tiene en cuenta las imágenes de los puntos que rodean la raíz. De esta forma, normalmente, la iteración es mucho más rápida.
  - Dados los puntos iniciales, los extremos del intervalo que contiene la raíz, este método determina la recta secante que pasa por ellos.

$$y = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} \cdot x + \frac{f(x_a) \cdot x_b - f(x_b) \cdot x_a}{x_b - x_a}$$

  - A continuación, calcula una estimación de la raíz igualando esta recta a 0, obteniéndose

$$x_r = \frac{f(x_b) \cdot x_a - f(x_a) \cdot x_b}{f(x_b) - f(x_a)}$$

  - O, equivalentemente

$$x_r = x_b - f(x_b) \cdot \frac{x_b - x_a}{f(x_b) - f(x_a)}$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- Seguidamente, como en el método de la bisección, se verifica en qué intervalo se encuentra la raíz.
  - Si $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$, x_r es la raíz de la función, se termina el cálculo
  - Si $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$, la raíz se encuentra en este subintervalo, $x_b = x_r$
  - En caso contrario, la raíz se encuentra en el otro subintervalo, $x_a = x_r$
- A partir de aquí, se prosigue con las iteraciones.

- En este caso, igual que con el método de la bisección, la raíz siempre se encuentra comprendida en el intervalo $[x_a, x_b]$.

- Si x_r queda muy cercano a uno de los extremos del intervalo (por ejemplo, x_a), puede modificarse el valor de dicho extremo y "clavarse" en el otro. En estos casos el intervalo de búsqueda prácticamente no variaría entre iteraciones, de forma que el criterio de finalización no es conveniente que se determine a partir de la diferencia entre los valores extremos del intervalo, sino que la finalización del método sea:
  - Cuando $|f(x_a)| < \varepsilon_0$ entonces $x_r = x_a$.
  - Cuando la diferencia entre dos valores consecutivos de x_r sea menor que ε_0

2.2. Métodos para ecuaciones generales

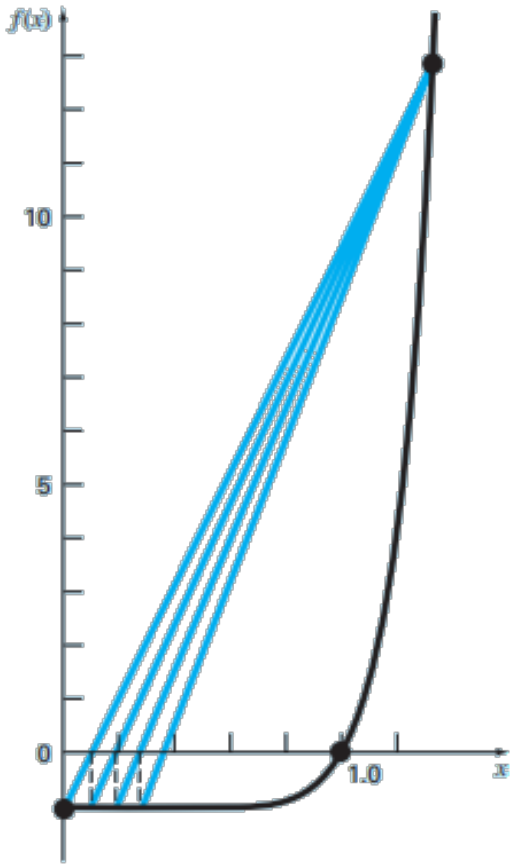
- **Método de la Regula Falsi modificada**
  - En este caso se controla si un extremo se queda clavado más de dos iteraciones consecutivas. Si se cumple esa condición, no se emplea la ecuación de la recta secante que pasa por los dos puntos extremos, sino que se emplea como imagen del punto que está clavado $\frac{1}{2} \cdot f(x)$. De esta manera se acelera el cálculo de la raíz obteniendo el resultado cuando $|x_b - x_a| < \varepsilon_0$.
  - Si se estanca x_b, se emplea $\frac{1}{2} \cdot f(x_b)$ en vez de $f(x_b)$ en el cálculo de x_r

$$x_r = \frac{\frac{1}{2} \cdot f(x_b) \cdot x_a - f(x_a) \cdot x_b}{\frac{1}{2} \cdot f(x_b) - f(x_a)}$$

  - Si se estanca x_a, se emplea $\frac{1}{2} \cdot f(x_a)$ en vez de $f(x_a)$ en el cálculo de x_r

$$x_r = \frac{f(x_b) \cdot x_a - \frac{1}{2} \cdot f(x_a) \cdot x_b}{f(x_b) - \frac{1}{2} \cdot f(x_a)}$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales



2.2. Métodos para ecuaciones generales

- **Método de la secante**
  - En este caso los dos puntos de la iteración no han de estar necesariamente a ambos lados de la raíz como en el caso de la Regula Falsi.
  - Así, la iteración no requiere el proceso de comparación para saber cuál de los valores anteriores se ha de sustituir como ocurría con Regula Falsi. Sin embargo, sí que se puede partir de puntos obtenidos de búsqueda por incrementos.
  - El proceso iterativo en este caso consiste en aplicar la relación:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- El criterio de convergencia es que $|f(x_i)| < \varepsilon_0$ para asegurar que x_i es una raíz, o bien que la diferencia entre dos valores consecutivos de x_i sea menor que ε_0
- Este método no requiere calcular la derivada de la función (como pasará con el método de Newton-Raphson).
- Para funciones donde $f(x_i) \approx f(x_{i-1})$, el método de la secante puede dar problemas ya que la siguiente iteración caería muy lejos del intervalo. En estos casos es más eficiente el método de la bisección.
- El método de la secante, al no estar acotada la raíz, puede conducir en algunos casos a la divergencia. Aunque, si converge, lo hace algo más rápido que el método de Regula Falsi.

2.2. Métodos para ecuaciones generales

2.2.5. Método de Newton-Raphson

- Si se aplica el desarrollo de Taylor a la función $f(x)$ en un punto $x_i + h$ se obtiene

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \cdot f'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_i) + \cdots = 0$$

Despreciable si h es suficientemente pequeño, $h^2 \ll h$

- De donde, $h = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
- Con lo que $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

- Comparado con el método de la secante $x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

- El criterio de convergencia es que $|f(x_i)| < \varepsilon_0$ para asegurar que x_i es una raíz, o bien que la diferencia entre dos valores consecutivos de x_i sea menor que ε_0

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- Interesa que la primera aproximación esté cercana a la raíz real.
- $f'(x)$ no ha de tender a cero en primera aproximación. En estos casos el algoritmo falla. Hay que ir con cuidado con máximos y mínimos cercanos a la raíz, que pueden impedir la convergencia.
- $f''(x)$ ha de ser suficientemente pequeña para que se pueda despreciar respecto a $f'(x)$.
- La convergencia en el método de Newton-Raphson es mejor que en el de la secante. Sin embargo, escoger este método dependerá de la dificultad de implementar el cálculo de f y f'.

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

2.3.1. Análisis de las raíces

- Si tenemos el polinomio

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

a. Teorema del resto

$$\frac{P(x)}{x-u} = Q(x) + \frac{R}{x-u} \quad \Rightarrow \quad P(x) = Q(x) \cdot (x-u) + R$$

Si $x = u \Rightarrow \quad P(u) = R$

b. Teorema del factor

Si u es raíz del polinomio $P(u) = R = 0$ por lo que

$$P(x) = (x-u) \cdot Q(x)$$

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- **2.3.2. Esquema de Horner**

  - Sea

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - u) + R$$

  - en donde

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$Q(x) = b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0$$

  - Si $P(x)$ y u son conocidos, se desea calcular el polinomio cociente $Q(x)$ y el resto R

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Igualando miembro a miembro de la igualdad

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - u) + R$$

$$\begin{cases} n & a_n = b_{n-1} \\ n-1 & a_{n-1} = b_{n-2} - u \cdot b_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ i+1 & a_{i+1} = b_i - u \cdot b_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 = b_0 - u \cdot b_1 \\ 0 & a_0 = R - u \cdot b_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + u \cdot b_{n-1} \\ \vdots \\ b_i = a_{i+1} + u \cdot b_{i+1} \\ \vdots \\ b_0 = a_1 + u \cdot b_1 \\ R = a_0 + u \cdot b_0 \end{array}$$

- Este método es óptimo para el cálculo de $P(u)$ con n productos y n sumas

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Este método corresponde al de Ruffini

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
u		$u \cdot a_n$	$u \cdot b_{n-2}$	$\cdots$	$u \cdot b_1$	$u \cdot b_0$
	a_n	$a_{n-1} + u \cdot a_n$	$a_{n-2} + u \cdot b_{n-2}$	$\cdots$	$a_1 + u \cdot b_1$	$a_0 + u \cdot b_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_0	R

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- El esquema de Horner se puede aplicar a factores cuadráticos
- Sea

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + p \cdot x + q) + R \cdot x + S$$

- en donde

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$Q(x) = b_{n-2} \cdot x^{n-2} + b_{n-3} \cdot x^{n-3} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0$$

- Si $P(x)$, p y q son conocidos, se desea calcular el polinomio cociente $Q(x)$ y el resto $R \cdot x + S$

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Igualando miembro a miembro de la igualdad

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + p \cdot x + q) + R \cdot x + S$$

$$\begin{cases} n & a_n = b_{n-2} \\ n-1 & a_{n-1} = b_{n-3} + p \cdot b_{n-2} \\ n-2 & a_{n-2} = b_{n-4} + p \cdot b_{n-3} + q \cdot b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ i+2 & a_{i+2} = b_i + p \cdot b_{i+1} + q \cdot b_{i+2} \\ \vdots & \vdots \\ 2 & a_2 = b_0 + p \cdot b_1 + q \cdot b_2 \\ 1 & a_1 = R + p \cdot b_0 + q \cdot b_1 \\ 0 & a_0 = S + q \cdot b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} & b_{n-2} = a_n \\ & b_{n-3} = a_{n-1} - p \cdot b_{n-2} \\ & b_{n-4} = a_{n-2} - p \cdot b_{n-3} - q \cdot b_{n-2} \\ & \vdots \\ & b_i = a_{i+2} - p \cdot b_{i+1} - q \cdot b_{i+2} \\ & \vdots \\ & b_0 = a_2 - p \cdot b_1 - q \cdot b_2 \\ & R = a_1 - p \cdot b_0 - q \cdot b_1 \\ & S = a_0 - q \cdot b_0 \end{cases}$$

- Se obtiene el resultado deseado

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

2.3.3. Método de Bairstow

- El método de Bairstow descompone un polinomio de coeficientes reales en un producto de factores cuadráticos
- Es un buen método cuando no hay raíces con multiplicidad
- Dado $P(x)$, se puede descomponer en:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + p \cdot x + q)$$

- En donde $(x^2 + p \cdot x + q)$ es el producto de dos raíces

- El objetivo del método de Bairstow es poder determinar los valores de p y q partiendo de unos valores iniciales p_0 y q_0 para conseguir que $R = S = 0$ en la expresión

$$P(x) = Q(x, p, q) \cdot (x^2 + p_i \cdot x + q_i) + R(p, q) \cdot x + S(p, q)$$

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Para ello, conocidos unos valores iniciales p_0 y q_0, y una cota de error ε_0, en cada iteración se aplicará

$$p_{i+1} = p_i + \Delta p_i$$
$$q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$$

- Si se expresan $R(p,q)$ y $S(p,q)$ en desarrollo en serie de Taylor:

$$R(p_{i+1}, q_{i+1}) = R(p_i, q_i) + \Delta p_i \cdot \frac{\partial R}{\partial p} + \Delta q_i \cdot \frac{\partial R}{\partial q} + \cdots = 0$$

$$S(p_{i+1}, q_{i+1}) = S(p_i, q_i) + \Delta p_i \cdot \frac{\partial S}{\partial p} + \Delta q_i \cdot \frac{\partial S}{\partial q} + \cdots = 0$$

- Los valores de $R(p_i, q_i)$ y $S(p_i, q_i)$ se obtienen aplicando el esquema de Horner a:

$$P(x) = Q(x, p_i, q_i) \cdot (x^2 + p_i \cdot x + q_i) + R(p_i, q_i) \cdot x + S(p_i, q_i)$$

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Para calcular los valores de Δp_i y Δq_i bastaría resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial S}{\partial p} & \frac{\partial S}{\partial q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta p_i \\ \Delta q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R(p_i, q_i) \\ -S(p_i, q_i) \end{pmatrix}$$

- ¿Cómo se puede calcular los valores de $\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial S}{\partial p} & \frac{\partial S}{\partial q} \end{pmatrix}$?

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Se parte de la expresión

$$P(x) = Q(x, p_i, q_i) \cdot (x^2 + p_i \cdot x + q_i) + R(p_i, q_i) \cdot x + S(p_i, q_i)$$

- Y se efectúa la derivada parcial de la expresión respecto a p y q

$$\frac{\partial P(x)}{\partial p} = (x^2 + p_i \cdot x + q_i) \cdot \frac{\partial Q(x)}{\partial p} + x \cdot Q(x) + x \cdot \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\partial S}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial q} = (x^2 + p_i \cdot x + q_i) \cdot \frac{\partial Q(x)}{\partial q} + Q(x) + x \cdot \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\partial S}{\partial q} = 0$$

- Reordenando las expresiones queda

$$-x \cdot Q(x) = (x^2 + p_i \cdot x + q_i) \cdot \frac{\partial Q(x)}{\partial p} + \frac{\partial R}{\partial p} \cdot x + \frac{\partial S}{\partial p}$$

$$-Q(x) = (x^2 + p_i \cdot x + q_i) \cdot \frac{\partial Q(x)}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial q} \cdot x + \frac{\partial S}{\partial q}$$

- Los valores que se buscan, los de los términos de la derecha, son el resto de la división entre los polinomios $-x \cdot Q(x)$ y $-Q(x)$ y el término cuadrático $(x^2 + p_i \cdot x + q_i)$ aplicando el esquema de Horner de nuevo

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- El proceso se repetirá hasta que Δp_i y Δq_i sean despreciables respecto a p_i y q_i de forma que se puede considerar que

$$P(x) \approx Q(x, p, q) \cdot (x^2 + p \cdot x + q)$$

- Se pueden obtener dos raíces resolviendo la expresión de segundo grado.
- El proceso se puede continuar, aplicando el método de nuevo al polinomio $Q(x)$ obtenido, hasta determinar todas las raíces
- El algoritmo del método de Bairstow es el siguiente
  - Se parte del polinomio

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

  - Los valores iniciales pueden ser:

$$p_0 = 1; \frac{a_1}{a_2}; \sqrt{|a_0|}$$

$$q_0 = 1; \frac{a_0}{a_2}; \sqrt{|a_0|}$$

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- El método para cada etapa es el siguiente:
  1. Se buscan p_0 y q_0 iniciales (si no son buenos se puede partir de otros)
  2. Por Horner se determina $Q(x, p_i, q_i),\ R(p_i, q_i),\ S(p_i, q_i)$
  3. Igualmente, por Horner se calculan:

$$-x \cdot Q(x) \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial p}, \frac{\partial S}{\partial p}$$

$$-Q(x) \quad \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial q}, \frac{\partial S}{\partial q}$$

  4. Se determinan Δp_i y Δq_i
  5. Se calculan $p_{i+1} = p_i + \Delta p_i; \quad q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$
  6. Si $|\Delta p_i| + |\Delta q_i| > \varepsilon$ se vuelve a 2. La condición final se puede hacer también sobre los valores de R y S suficientemente pequeños.
  7. Calcular las raíces de $x^2 + p_i \cdot x + q_i$

2.3. Métodos para ecuaciones polinómicas

- Si el método no converge al cabo de unas cuantas iteraciones, se buscan otros valores iniciales
- El proceso es el mismo para todas las raíces
- Las raíces múltiples dificultan la convergencia. Para eliminar la multiplicidad basta obtener un nuevo polinomio como

$$\frac{P(x)}{mcd\left(P(x), P'(x)\right)}$$

que tendrá las mismas raíces del polinomio original sin multiplicidad

2.4. Sistemas de ecuaciones no lineales

- Si tenemos un sistema de ecuaciones del tipo

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\dots$$
$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\boldsymbol{F(x) = 0}$$

- La solución a este sistema es el conjunto de x_1 a x_n que simultáneamente igualan todas las ecuaciones a cero.

- Si las funciones $f(x)$ se pueden expresar de la forma

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - c = 0$$

serán ecuaciones lineales y se tratarán en el próximo tema.

- Aquí veremos cómo tratar el caso de sistemas de ecuaciones no lineales.

2.4. Sistemas de ecuaciones no lineales

- **Método de Newton**

  - Si se aplica el desarrollo en serie de Taylor para cada una de las funciones se tiene

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$f_j(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = f_j(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\delta x_n + O(\delta\boldsymbol{x}^2)$$

  - Que equivaldría a escribir

$$f_j(\boldsymbol{x}_i + \delta\boldsymbol{x}) = f_j(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_n}\delta x_n + O(\delta\boldsymbol{x}^2)$$

2.4. Sistemas de ecuaciones no lineales

- En notación matricial

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i + \delta\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x}_i)}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_i)\text{ Matriz Jacobiana}} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} + O(\delta\boldsymbol{x}^2)$$

Despreciables

- Es decir

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \delta\boldsymbol{x}_i$$

2.4. Sistemas de ecuaciones no lineales

- Esto nos permite calcular $\delta \boldsymbol{x}$ si se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineal

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)$$

- Por lo que tendremos

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \delta \boldsymbol{x}_i$$

- El método de Newton es un método iterativo en el que la convergencia depende de los valores iniciales de los que se parte. No tiene porqué haber única solución. Puntos iniciales distintos pueden converger a soluciones distintas, o no converger.

- El cálculo de la matriz Jacobiana puede presentar problemas si es difícil de calcular las derivadas parciales de forma analítica. Si se han de calcular numéricamente esto implica un alto esfuerzo de cálculo en cada etapa de cálculo para determinar el valor de la matriz Jacobiana.

2.4. Sistemas de ecuaciones no lineales

- El método parte de $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ y se itera hasta que $\left|\left|\delta \boldsymbol{x}_i\right|\right| < \boldsymbol{\varepsilon}_0$.
- En cada iteración hay que resolver un sistema de ecuaciones lineal (tema 3).
- Es conveniente controlar también el número de iteraciones, ya que no se puede asegurar la convergencia.


IQS
UNIVERSITAT RAMON LLULL

2.2. Métodos para ecuaciones generales.

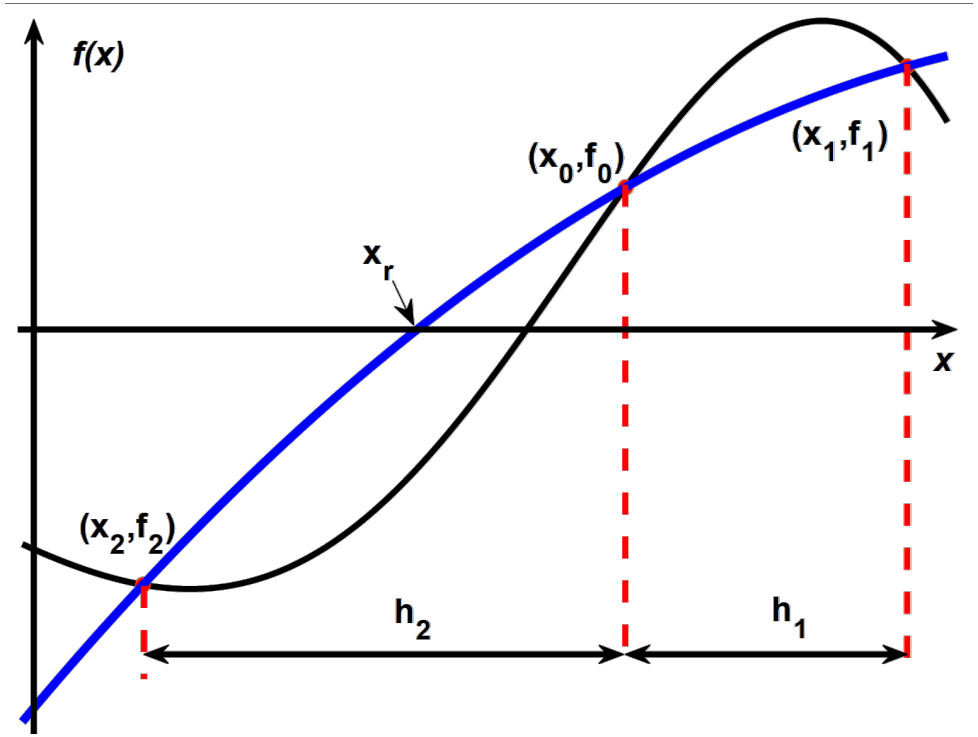
- **Método de Muller**

  - El método de Muller consiste en calcular la raíz mediante el ajuste de una función cuadrática y no lineal como hasta ahora. Esto permite ajustar mejor la función y aproximar más rápidamente la raíz.

  - Un polinomio de segundo grado se ajusta a tres puntos de la función cercanos a la raíz $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$. La raíz obtenida del polinomio corresponde a la estimación de la raíz de la función. El proceso se repite usando el conjunto de tres puntos más cercanos a la raíz.

  - El método de Muller se aplica ajustando una ecuación cuadrática de la forma $av^2 + bv + c$.

2.2. Métodos para ecuaciones generales.



- Para simplificar el desarrollo, se transforman los ejes para que pasen por el punto central haciendo $v = x - x_0$.
- Haciendo $h_1 = x_1 - x_0$ y $h_2 = x_0 - x_2$ se pueden evaluar los coeficientes de la ecuación cuadrática aplicándolo a los tres puntos

2.2. Métodos para ecuaciones generales.

$$v = 0, \qquad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = f_0$$
$$v = h_1, \qquad a \cdot {h_1}^2 + b \cdot h_1 + c = f_1$$
$$v = -h_2, \qquad a \cdot {h_2}^2 - b \cdot h_2 + c = f_2$$

- De la primera ecuación tenemos $c = f_0$ y haciendo que $\frac{h_2}{h_1} = \gamma$ se pueden obtener los valores de a y b

$$a = \frac{\gamma f_1 - f_0(1+\gamma) + f_2}{\gamma h_1^2 (1+\gamma)}; \qquad b = \frac{f_1 - f_0 - a h_1^2}{h_1}$$

- Tras este cálculo se resuelve $av^2 + bv + c = 0$ para encontrar la raíz. Se escoge aquella más cercana al punto medio x_0.
- El valor obtenido es

$$x_r = x_0 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- Con el signo del denominador escogido de tal forma que dé el mayor valor absoluto posible (para que esté lo más cerca de x_0 posible).

2.2. Métodos para ecuaciones generales.

- La raíz obtenida se toma como uno de los tres puntos para la siguiente aproximación, tomando los tres puntos que queden más cercanos. O sea, si se desplaza a la derecha, x_0, x_1 y x_r, y si se desplaza a la izquierda, x_0, x_2 y x_r.

- Algoritmo del método de Muller, asumiendo que x_2, x_0 y x_1 están en valor ascendente:
  1. Se evalúan los correspondientes valores de la función (f_2, f_0, f_1).
  2. Se calculan los coeficientes de la parábola (a, b y c) determinada por los tres puntos.
  3. Se calculan las dos raíces de la ecuación cuadrática.
  4. Se escoge la raíz más cercana a x_0 y se denomina x_r.
  5. Si $x_r > x_0$ entonces se reescriben x_0, x_r, x_1 en x_2, x_0 y x_1. En caso contrario, se reescriben x_2, x_r, x_0 en x_2, x_0 y x_1.
  6. Si $|f(x_r)| < \varepsilon_0$ (o la diferencia entre los extremos), entonces se devuelve x_r. En caso contrario, se vuelve al paso 1.

- Ejemplo: encontrar una raíz para $f(x) = sin(x) - \frac{x}{2}$ alrededor de $\mathrm{x} = 2$.

2.2. Métodos para ecuaciones generales.

- La convergencia de este método es similar en tiempo a la de Newton-Raphson, pero este presenta como ventaja no tener que calcular las derivadas. Además, una vez calculados los valores iniciales, solamente se ha de evaluar una vez la función en cada iteración.

- Sin embargo, tiene la desventaja inicial que debe evaluar la función en tres puntos, pero se recupera en las iteraciones que lleva a cabo para determinar la raíz con la precisión deseada.

2.2. Métodos para ecuaciones generales.

- **Método de Ridders**

  - Si se tiene una raíz en el intervalo $[x_1, x_2]$ de tal forma que $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, el método de Ridders calcula el punto central del intervalo

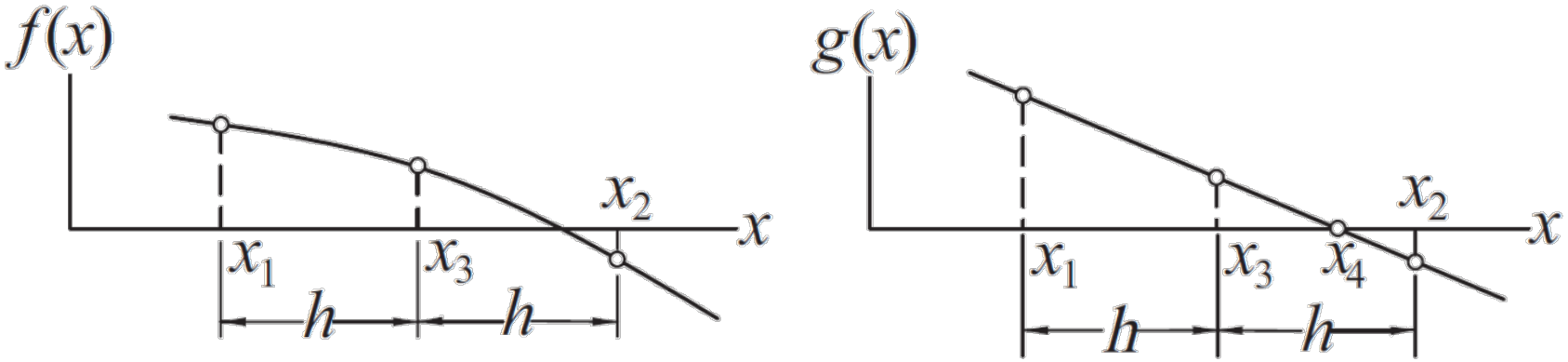
$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

  - Luego ajusta la siguiente función, utilizando un factor e^h con $h = x_3 - x_1 = x_2 - x_3$

$$f(x_1) - 2f(x_3)e^{hQ} + f(x_2)e^{h2Q} = 0 \ (*)$$

  - Donde se define Q para que $g(x) = f(x)e^{(x-x_1)Q}$ sea una línea recta.

2.2. Métodos para ecuaciones generales.



- La ecuación (*) es cuadrática en e^{hQ} y se puede resolver como

$$e^{hQ} = \frac{f(x_3) + sign[f(x_2)]\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}}{f(x_2)}$$

- Esto hace que

$$x_4 = x_3 - g_3 \cdot \frac{x_3 - x_1}{g_3 - g_1} = x_3 - f_3 \cdot e^{hQ} \cdot \frac{x_3 - x_1}{f_3 \cdot e^{hQ} - f_1}$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales.

- Con esto último se puede obtener una nueva aproximación de la raíz, x_4, que se obtiene a partir de la expresión

$$x_4 = x_3 + (x_3 - x_1) \cdot \frac{sign(f(x_1) - f(x_2)) \cdot f(x_3)}{\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}}$$

- x_4 siempre queda dentro del intervalo $[x_1, x_2]$.

- Criterios para acotar la raíz:
  - Si $f(x_3) \cdot f(x_4) < 0 \rightarrow [x_3, x_4]$
  - En caso contrario, si $f(x_1) \cdot f(x_4) < 0 \rightarrow [x_1, x_4]$, sino $[x_4, x_2]$.

- Posible criterio de finalización: cuando la diferencia en valor absoluto entre dos valores consecutivos de x_4 es $< \varepsilon_0$ (igual que en Newton-Raphson).

- Pega del método: en cada etapa se evalúan dos imágenes de la función.

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- **Método de Brent**

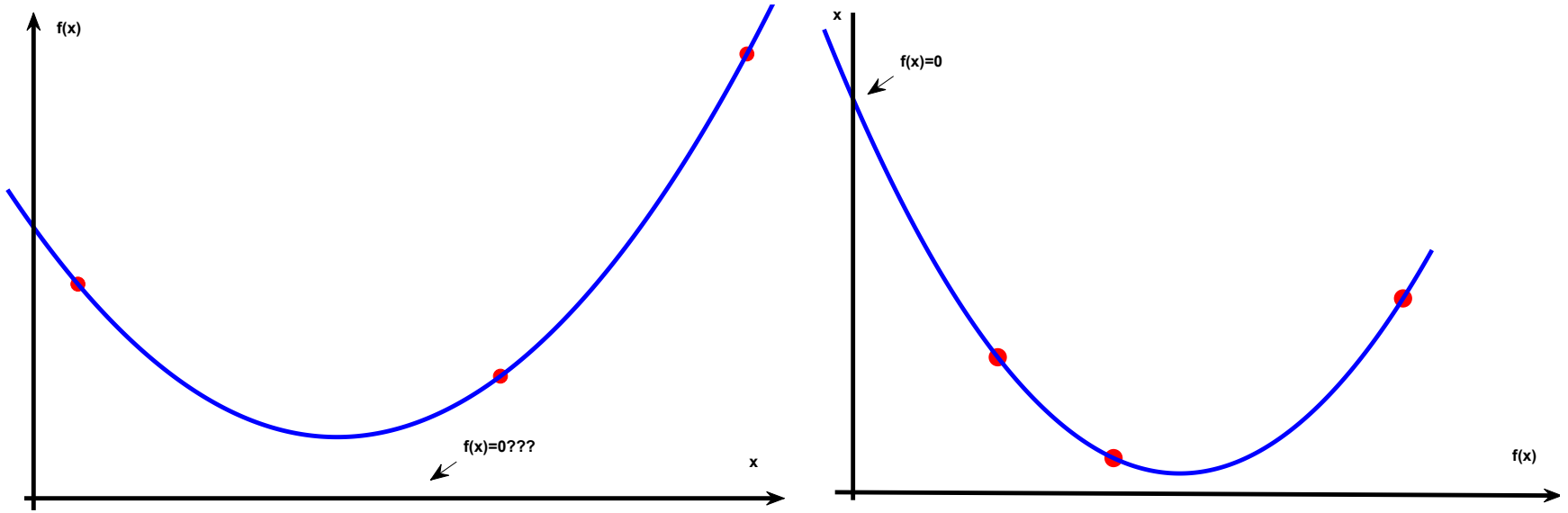
  - Este método intenta mantener, por un lado, una alta velocidad de convergencia, con la seguridad de que la raíz no caiga fuera del intervalo

  - El método, si es posible, aplica la interpolación cuadrática inversa a partir de 3 puntos del intervalo: $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ en donde b corresponde al punto central de los tres, aplicando la siguiente expresión

$$x = \frac{[y - f(a)] \cdot [y - f(b)] \cdot c}{[f(c) - f(a)] \cdot [f(c) - f(b)]} + \frac{[y - f(b)] \cdot [y - f(c)] \cdot a}{[f(a) - f(b)] \cdot [f(a) - f(c)]} + \frac{[y - f(c)] \cdot [y - f(a)] \cdot b}{[f(b) - f(c)] \cdot [f(b) - f(a)]}$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- Se puede observar como en la interpolación cuadrática inversa siempre se tendrá un valor solución, cosa que no sucede en una interpolación cuadrática



2.2. Métodos para ecuaciones generales

- Si se calcula el valor de x para el que y=0, se tiene que

$$x = b - \frac{P}{Q}$$

- en donde

$$P = S \cdot [T \cdot (T - R) \cdot (a - b) - (R - 1) \cdot (b - c)]$$
$$Q = (T - 1) \cdot (R - 1) \cdot (S - 1)$$

- con

$$R = \frac{f(b)}{f(a)}; \quad S = \frac{f(b)}{f(c)}; \quad T = \frac{f(c)}{f(a)}$$

2.2. Métodos para ecuaciones generales

- El método de Brent siempre que pueda aplicará la interpolación cuadrática inversa (que hace que el método acelere la convergencia)
- En el caso en el que los dos valores a y c sean iguales se aplicará el método de la secante (no se puede aplicar la interpolación cuadrática inversa)
- Si el valor de x calculado cae fuera del intervalo, se aplicará el método de la bisección
- El método de Brent es el que tiene programado Matlab® en su función de cálculo de raíces *fzero*.